DOI: https://doi.org/10.34069/AI/2026.87.01.8
How to Cite:
Silgado-Tuñón, D.A., Barrios Mercado, J.C., & Montelongo Aguilar, O. (2026). Comprensión conceptual de Sistemas de Ecuaciones Lineales en secundaria: una propuesta didáctica con GeoGebra. *Amazonia Investiga*, *15*(87), 93-105. https://doi.org/10.34069/AI/2026.87.01.8

Comprensión conceptual de Sistemas de Ecuaciones Lineales en secundaria: una propuesta didáctica con GeoGebra

Conceptual understanding of systems of Linear Equations in secondary education: a didactic proposal using GeoGebra

Received: May 20, 2026 Accepted: June 30, 2026

Written by:
Denilsón Andrés Silgado-Tuñón[1]
https://orcid.org/0009-0005-7098-5073
José Camilo Barrios Mercado[2]
https://orcid.org/0009-0003-7082-2261
Ofelia Montelongo Aguilar[3]
https://orcid.org/0000-0001-5340-2140

Resumen

El presente estudio muestra una propuesta de enseñanza orientada a fortalecer la comprensión de los Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL) en estudiantes de secundaria mediante el uso de GeoGebra, desde los marcos teóricos de la teoría de los registros semióticos de Duval y el Ciclo ACE derivado de la teoría APOE. Se diseñó e implementó una secuencia didáctica con actividades centradas en la conversión entre registros algebraico y geométrico, aplicadas a un grupo de 48 estudiantes de una Escuela Secundaria de México. El análisis de los resultados pone en evidencia que el uso de la herramienta digital GeoGebra si logra que los estudiantes visualicen geométricamente la solución de un SEL, y esto favorece a la comprensión de los tipos soluciones de las ecuaciones cuando; una solución única significa intersección de dos rectas en un punto, infinitas soluciones son dos rectas coincidentes y no tiene solución cuando dos rectas que no se tocan en ningún punto. Los estudiantes al lograr resolver esto algebraicamente y analizar geométricamente mostraron fortalecimiento de sus habilidades de razonamiento, argumentación y razonamiento lógico. Se concluye que la combinación tecnológica con temas matemáticos es un recurso fundamental para mejorar la

Abstract

This study presents a teaching proposal aimed at strengthening secondary school students' understanding of Systems of Linear Equations (SLE) using GeoGebra software, based on Duval's Theory of Semiotic Representation Registers and the ACE Cycle derived from APOS Theory. A didactic sequence was designed and implemented, consisting of activities focused on the conversion between algebraic and geometric representations. The proposal was applied to a group of 48 students from a secondary school in Mexico. The analysis of the results shows that the use of the digital tool GeoGebra enables students to visualize geometrically the solutions of a SLE, thereby enhancing their understanding. Students were able to recognize that a unique solution corresponds to the intersection of two lines at a single point, infinitely many solutions correspond to coincidence lines, and no solution corresponds to two lines that never intersect. By solving these systems algebraically and analyzing them geometrically, students demonstrated improvements in their reasoning, argumentation, and logical thinking skills. It is concluded that the integration of technology with mathematical topics is a fundamental resource for improving the teaching

[1] Maestro-Investigador de la Institución Universitaria de Barranquilla. Grupo de investigación sobre el uso de la IA para enseñanza aprendizaje de las matemáticas por la Universidad Autónoma de Zacatecas, Zacatecas, México. E-mail: denilson.silgado@uaz.edu.mx
[2] Maestro-Investigador en Matemática Educativa, Universidad Autónoma de Zacatecas, Zacatecas, México. E-mail: camilo19981215@gmail.com
[3] Doctora-Investigador de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas, Zacatecas, México. E-mail: omaguilar_m@hotmail.com

enseñanza y el aprendizaje del Álgebra Lineal en el nivel de secundaria.

Palabras clave: Matemáticas, geometría, enseñanza y formación, resolución de problemas, educación secundaria.

and learning of SLE at the secondary education level.

Keywords: Mathematics, geometry, teaching and training, problem solving, secondary education.

Introducción

Los SEL constituyen un contenido fundamental del Álgebra escolar y una base importante para el aprendizaje posterior del Álgebra Lineal en el nivel universitario. Sin embargo, aunque existen numerosos estudios y tesis centrados en la enseñanza de los SEL en educación superior, la investigación orientada específicamente al nivel secundario continúa siendo limitada. En los libros de texto escolares, predomina un enfoque centrado en la mecanización de métodos de resolución, dejando en segundo plano la reflexión conceptual sobre cuándo un sistema tiene solución única, infinitas soluciones o no tiene solución. En este sentido, Smith et al. (2022) señalan la escasez de investigaciones relacionadas con las concepciones de los estudiantes acerca de la naturaleza de las soluciones de los SEL.

Diversos autores han documentado esta problemática en la enseñanza del álgebra escolar. Ballén (2012), Figueroa (2013), Anaya-Puebla (2020) y Hernández (2021) coinciden en destacar la falta de énfasis en la resolución comprensiva de problemas relacionados con los SEL, situación que afecta el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes. Asimismo, estos autores identificaron las dificultades a la hora de representar un conjunto solución y la representación geométrica de un SEL. Por otra parte, Tashtoush et al. (2023) demostraron que algunos estudiantes tienen dificultades para relacionar la representación algebraica con la geométrica de un SEL. Además, León et al. (2024) encontraron que incluso algunos futuros profesores de matemáticas realizan conexiones simples entre estas representaciones. Así, Henríquez-Rivas & Verdugo-Hernández (2024) sostienen que si se aplican ejemplos en las actividades de Álgebra puede promoverse una mejor comprensión de dicha asignatura.

Recientemente, se han realizado investigaciones que ponen de manifiesto la necesidad de plantear nuevas estrategias de enseñanza para el nivel de secundaria para la enseñanza de los SEL. Martín et al. (2024) mostraron que algunos estudiantes comprenden los SEL de una forma mecánica, y no debido a esto no logran una relación entre la representación algebraica y la geométrica. Por consiguiente, Sansyzbayeva et al. (2024) proponen estrategias que incluyan ecuaciones, inecuaciones y sistemas para fomentar que los estudiantes logren argumentar mejor sus respuestas e interpretación de un ejercicio matemático. Asimismo, Nugroho & Septianisha (2024) evidenciaron que el uso de GeoGebra dentro de un enfoque STEM provoca una mejoría en las habilidades de representación geométrica y razonamiento matemático. De manera similar, Deogratias (2022) propuso un método al que denominó cruce para favorecer la visualización geométrica entre los coeficientes y las soluciones, mientras que Setyowati & Wijaya (2025) demostraron que la enseñanza personalizada basada en Educación Matemática Realista fortalece la competencia matemática y la autoconfianza de los estudiantes.

Uno de los inconvenientes que presentan las dificultades descritas anteriormente es que esto puede afectar futuramente el desempeño del aprendizaje universitario. Arjudin et al. (2020) confirmaron que los estudiantes presentan problemas en la resolución de tareas relacionadas con la asignatura de Álgebra Lineal y recomiendan utilizar estrategias educativas que tengan por objetivo promover una comprensión profunda de los conceptos del Álgebra. En esta misma línea de investigación, Hernández (2021) señala que, en secundaria pueden establecerse objetivos relacionados con la resolución de SEL de dos incógnitas, pero la comprensión del conjunto solución de estos sistemas se aborda de forma muy superficial. Tatira (2023) añade que comprender el contexto y el significado de un conjunto solución es algo esencial para el aprendizaje del Álgebra Lineal. Por ello, muchos estudiantes, al llegar a la universidad y enfrentarse a estos problemas algebraicos, no logran identificar correctamente las propiedades estructurales del conjunto solución. Para atender esta problemática contemporánea, este estudio plantea una alternativa pedagógica mediada por tecnología para el nivel básico.

Objetivo del estudio

El objetivo de esta investigación es mejorar la comprensión conceptual de los estudiantes de nivel secundaria en la resolución del conjunto solución de los SEL en dos variables, mediante el uso de una propuesta didáctica basada en la teoría de representaciones semióticas de Duval, el enfoque de la teoría APOE y su ciclo ACE, integrando como herramienta tecnológica el software GeoGebra para que los estudiantes comparen la solución algebraica con la geométrica. Asimismo, se analizó cómo los estudiantes comprenden la relación de este tipo de representaciones (algebraico y geométrico) cuando el sistema de ecuaciones tenga única solución, infinitas soluciones o no tenga solución.

Marco Teórico

La teoría APOE (Action, Process, Object, Schema), propuesta por Dubinsky (1991), explica la construcción del conocimiento matemático a través de cuatro niveles: acción, proceso, objeto y esquema. Como estrategia de implementación, el ciclo ACE (Activities, Classroom Discussion and Exercises) organiza el aprendizaje mediante actividades, discusión en clase y ejercicios, favoreciendo la comprensión conceptual (Kú, 2007). En esta investigación, el ciclo ACE fundamenta el diseño de la secuencia didáctica para promover el aprendizaje de los SEL con el apoyo de GeoGebra.

Este estudio se basa en la Teoría de los Registros Semióticos de Duval (1993, 1999, 2017, 2018), la cual concibe el pensamiento matemático como la coordinación entre varios sistemas de representación. Desde esta perspectiva, la comprensión de algún objeto matemático no depende necesariamente de la manipulación de símbolos, sino de la capacidad de relacionar distintos tipos de registros.

Definición funcional: Un registro de representación es un sistema organizado de signos, en el cual podemos operar, también podemos explorar este y comunicarlo como un concepto matemático.

Definición estructural: Este marco explica que la actividad matemática se compone de dos tipos de transformaciones semióticas: *Los tratamientos que se realizan dentro de un mismo registro* y *las conversiones, que implican cambiar de un registro a otro pero utilizando el mismo objeto matemático.*

Lo central en la comprensión matemática son las *conversiones*, es decir el paso de una representación a otra, ya que requieren identificar correspondencias entre los contenidos que se encuentran en diferentes representaciones. Aunque los tratamientos suelen ser mecánicos, estas conversiones exigen procesos de nivel cognitivo más complejos debido a que se deben coordinar varios conceptos entre distintos registros.

Así, las decisiones que un estudiante toma al resolver una situación matemática dependen de los registros de representación que moviliza y de su capacidad para realizar tratamientos y conversiones entre ellos. Estas transformaciones permiten seleccionar información relevante y construir interpretaciones más profundas de los objetos matemáticos (Duval, 2018). En otras palabras, hacen posible la comprensión conceptual.

En el caso de los SEL, la conversión entre el registro algebraico y el registro geométrico permite interpretar la naturaleza de las soluciones del sistema: solución única (rectas secantes), infinitas soluciones (rectas coincidentes) o no tiene solución (rectas paralelas). Sin embargo, Sandoval & Possani (2016) distingue que es importante que los estudiantes realizan estas conversiones, especialmente para pasar de un registro a otro.

GeoGebra actúa como mediador tecnológico al facilitar la coordinación entre registros de representación. Su integración permite representar simultáneamente expresiones algebraicas y representaciones gráficas en el plano cartesiano, favoreciendo procesos de exploración, visualización y validación matemática (Hall & Chamblee, 2013; Juandi et al., 2021).

Este estudio analiza la manera en la que los estudiantes resuelven un SEL y coordinan registros de representación semiótica en el proceso de solución de estos sistemas. Centrándonos particularmente en los cambios de representación algebraicos y geométricos como indicadores de comprensión conceptual.

Metodología

Este estudio utiliza una metodología basa en tres fases derivadas del ciclo ACE de la teoría APOE (Asiala et al., 1997; Vizcaíno, 2003), con un diseño de intervención didáctica donde también, utilizamos la tecnología como recurso educativo para la mejora del aprendizaje algebraico en secundaria (Sandoval & Possani, 2016; Drijvers et al., 2016).

https://amazoniainvestiga.info/ ISSN 2322- 6307

Participantes: La prueba se aplicó a un grupo de 48 estudiantes de segundo grado de secundaria de una Escuela Secundaria de Zacatecas, México. Los estudiantes tenían edades entre 13 y 15 años, y habían cursado previamente contenidos de Álgebra Básica, incluyendo ecuaciones lineales con una variable. No habían recibido instrucción formal sobre SEL con dos variables antes de la intervención. Se seleccionaron tres estudiantes al azar (dos mujeres y un hombre, identificados como E1, E2 y E20) para participar en entrevistas semiestructuradas que permitieron profundizar en sus procesos de pensamiento y comprensión conceptual.

Instrumentos y materiales: Los materiales principales fueron: (a) una secuencia didáctica de cinco sesiones diseñada por los investigadores, fundamentada en la teoría de los registros semióticos de Duval y el Ciclo ACE; (b) el software GeoGebra (versión 6.0) instalado en computadoras del laboratorio de cómputo de la escuela; (c) guías de trabajo impresas para cada sesión; y (d) un protocolo de entrevista semiestructurada con seis preguntas orientadas a explorar las concepciones sobre los tipos de solución, la transición entre registros de representación y el impacto del uso de GeoGebra.

Procedimiento: La implementación se organizó en cinco sesiones de 90 minutos cada una, distribuidas a lo largo de tres semanas:

Fase 1: Actividades de exploración (A). Las sesiones 1 y 2 se desarrollaron en el centro de cómputo para garantizar el acceso al software GeoGebra. Los estudiantes, organizados en parejas, exploraron la relación funcional entre las ecuaciones lineales y su representación gráfica. Las actividades diseñadas priorizaron la conversión entre el registro algebraico y el geométrico, haciendo especial énfasis en la identificación estructural de los tres tipos de soluciones posibles.
Fase 2: Discusión en clase (C). Las sesiones 3 y 4 se desarrollaron en el aula de clases. Los estudiantes discutieron primero entre ellos sus hallazgos. Luego, lo hicieron saber para toda la clase, después el profesor realizó la formalización del saber explicando cómo se conectan las experiencias tecnológicas con el lenguaje algebraico formal.
Fase 3: Ejercicios de consolidación (E). La sesión 5 combinó trabajo individual y en parejas, donde los estudiantes analizan el conjunto solución de un SEL según los resultados obtenidos algebraicamente y las gráficas arrojadas por GeoGebra y de esta manera promoviendo el cambio de representación entre los registros algebraico y geométrico.

Las entrevistas semiestructuradas se realizaron al terminar la sesión 5, con una duración aproximada de 20 minutos cada una. Las preguntas tenían la intención de que los estudiantes analizaron los cambios de representación acorde al conjunto solución de los SEL, para ellos se les preguntaba sobre el conjunto solución, el significado de la intersección de rectas, relación entre el conjunto solución dado de manera gráfica y algebraica y viceversa, la utilidad que les dio el software GeoGebra, que método preferían usar para resolver un sistema y diferencias entre resolver de manera escrita y de manera tecnológica.

Análisis de datos: El análisis fue cualitativo y se centró en: a) Las producciones realizadas por los estudiantes durante todas las sesiones, tanto físicas como digitales, b) el análisis de lo descrito por los estudiantes en las entrevistas semiestructuradas, c) las notas de campo de los entrevistadores. Se empleó el análisis de contenido temático (Borji et al., 2018), para identificar patrones en los razonamientos, dificultades conceptuales y avances en la comprensión de los SEL. Las transcripciones se realizaron con la ayuda del software Whisper que realiza reconocimiento automático de voz. Y el análisis preliminar se sistematizó con el apoyo de herramientas de procesamiento de texto, pero sin salirse de la interpretación de los investigadores en todas las etapas, como la implementación de Silgado-Tuñón et al. (2025a).

Resultados y Discusión

Está investigación tuvo el propósito de analizar cómo el uso de estrategias didácticas sostenidas con las representaciones semióticas (algebraica y geométrica) y la tecnología pueden favorecer la comprensión en los estudiantes en la resolución de los SEL. En este apartado, se presentan y discuten los hallazgos relevantes encontrados en la implementación de las actividades, esto articulando con el marco teórico y con investigaciones previas relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de los SEL. Los avances ponen de manifiesto los avances significativos en la comprensión de los estudiantes en la resolución e interpretación de los SEL, así como su capacidad para relacionar distintos tipos de representaciones matemáticas.

La primera actividad tenía como finalidad explorar qué conocimientos tenían los estudiantes acerca de lo que es un conjunto solución de un SEL en este caso de dos variables. Para ello, se plantearon las ecuaciones $x + y = 0$ y $0x + 0y = 2$. La selección de estas expresiones permitió observar dicha interpretación que tenían los estudiantes acerca de la solución de un SEL cuando este tiene infinitas soluciones o no tiene solución. Este momento inicial permitió evaluar cómo los estudiantes logran utilizar métodos de solución para un sistema y cómo interpretan el conjunto solución de este, todo esto antes de trabajar formalmente los SEL (figura 1).

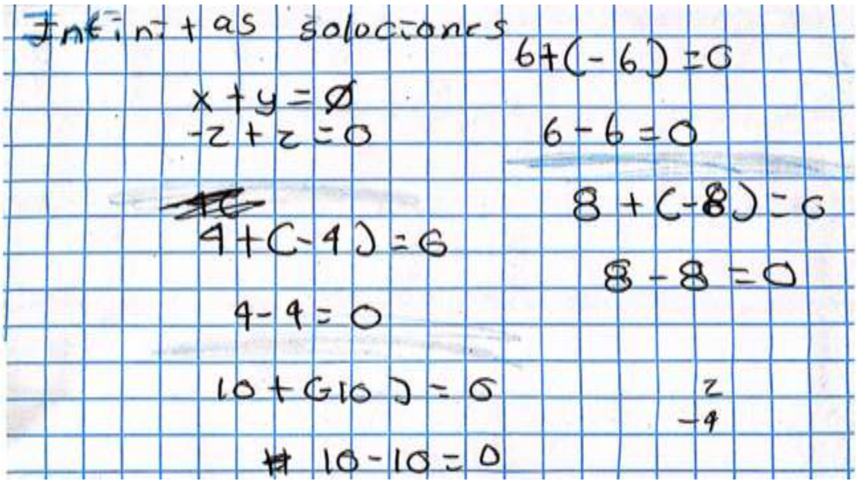

Figura 1. Respuesta del estudiante E4.
Fuente. Elaboración propia a partir de la producción escrita del estudiante E4.

La respuesta del estudiante E4 pone de manifiesto que tiene una comprensión inicial adecuada de un sistema que tiene infinitas soluciones. El estudiante propuso diferentes pares ordenados, como $(6, -6)$, $(8, -8)$y $(10, -10)$, verificando que todos satisfacen la ecuación. Además, al final de su hoja al terminar el procedimiento dejó por escrito la expresión “infinitas soluciones”, lo que indica que este estudiante tiene claro que existen infinitos pares ordenados que satisfacen esta ecuación. Este resultado es importante ya que muestra que el estudiante no se quedó solo con el resultado de $0 = 0$, sino que fue más allá dándole distintos valores a x e y para demostrar que esa igualdad significa que es un sistema con infinitas soluciones, esto muestra una interpretación que no es netamente mecánica y desde las perspectiva de Raymond Duval, este proceso implica la articulación de dos registros el algebraico y el numérico, permitiendo al estudiante reconocer relaciones invariantes dentro de la expresión algebraica.

De manera similar, la estudiante E10 respondió correctamente a la ecuación $x + y = 0$, proponiendo diversos pares ordenados como $(-1,1)$, $(-2,2)$, $(-60,60)$ y $(-1857,1857)$. Estos ejemplos utilizados por la estudiante dan a entender que comprende el significado de la igualdad condicionada, es decir, reconoce que se necesitan dos números que la sumarse o restarse estos deben dar como resultado $0 = 0$ para satisfacer la ecuación. La estudiante incluso en su hoja de trabajo no describe la expresión “infinitas soluciones”, lo que sugiere una respuesta correcta del conjunto solución, refiriéndose a que existen infinitos pares ordenados que satisfacen la ecuación. Posteriormente, ante la ecuación $0x + 0y = 2$, respondió “no hay soluciones”, reconociendo que la igualdad $0 = 2$, constituye una contradicción imposible de satisfacer. Estos resultados muestran que algunos estudiantes inicialmente si interpretan correctamente el significado del conjunto solución de un SEL, aunque todavía resuelvan de cierta forma numérica y mecánica concreta (figura 2).

https://amazoniainvestiga.info/ ISSN 2322- 6307

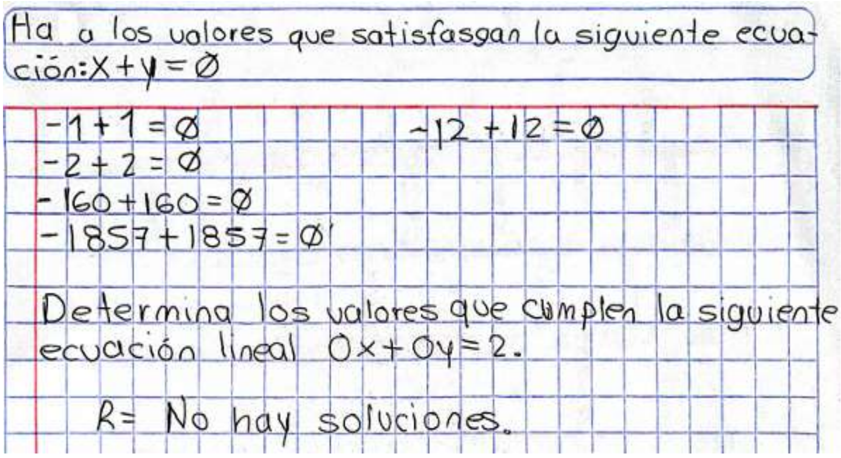

Figura 2. Respuesta de la estudiante E10
Fuente. Elaboración propia a partir de la producción escrita del estudiante E10.

Estos resultados se relacionan con lo planteado por Martín et al. (2024), quienes señalan que algunos estudiantes interpretan las ecuaciones como algo que solo requiere procedimientos operativos y no como relaciones matemáticas con un significado conceptual. Sin embargo, los estudiantes de esta investigación al principio mostraron un razonamiento estructural, especialmente cuando identificaron relaciones entre la solución del sistema y la demostración numérica de ese mismo. En resumen, es importante porque se evidencia que, incluso antes de abordar formalmente los SEL, algunos estudiantes logran mostrar que cuentan con una interpretación conceptual si se les presentan tareas de este tipo orientadas a la explotación e interpretación matemática.

Posteriormente, se desarrolló la segunda actividad ya profundizando en la compresión de diferentes tipos de soluciones que tienen los SEL: única solución, infinitas soluciones o no tiene solución. En esta fase se utilizó GeoGebra como herramienta tecnológica de apoyo didáctico. Con el objetivo principal de que los estudiantes relacionen las representaciones algebraicas con las geométricas de los SEL favoreciendo el significado del conjunto solución desde dos perspectivas: la escrita y la gráfica.

En este orden de ideas, los estudiantes observaron durante las explicaciones del docente como dos rectas se cruzan en un punto, como otras comparten todos los puntos, es decir, una encima de la otra y como otras no se encuentran en ningún punto en forma. El uso de GeoGebra permitió a los estudiantes visualizar esto, y además como la manipulación de los coeficientes de las variables alteraba la posición de las rectas en el plano cartesiano. Por consiguiente, el tipo de solución del sistema de forma gráfica. Esta experiencia resultó relevante porque ayudó a que los estudiantes vieran como se pasa de un registro a otro y cómo se relacionan esto y que aunque esté representados de distintas formas llegan al mismo conjunto solución (figura 3).

Figura 3. Explicación del maestro de la actividad 2

En este sentido, la estudiante E2 resolvió correctamente el sistema:

$$2x - y = 4x + 3y = 6$$

La estudiante resolvió adecuadamente el sistema utilizando el método de reducción y luego el de sustitución para encontrar el valor de la otra incógnita, con ello llegó a que el sistema tenía una única solución. Posteriormente, con ayuda del software GeoGebra confirmó gráficamente que su respuesta era correcta y además, explicó al grupo que las rectas se encontraban en único punto, y este punto es específicamente la respuesta que ella halló utilizando el método algebraico de reducción. Este desempeño evidencia que logró relacionar el tratamiento algebraico con la interpretación geométrica del sistema, comprendiendo que una solución única corresponde al punto donde ambas rectas se cruzan (figura 4).

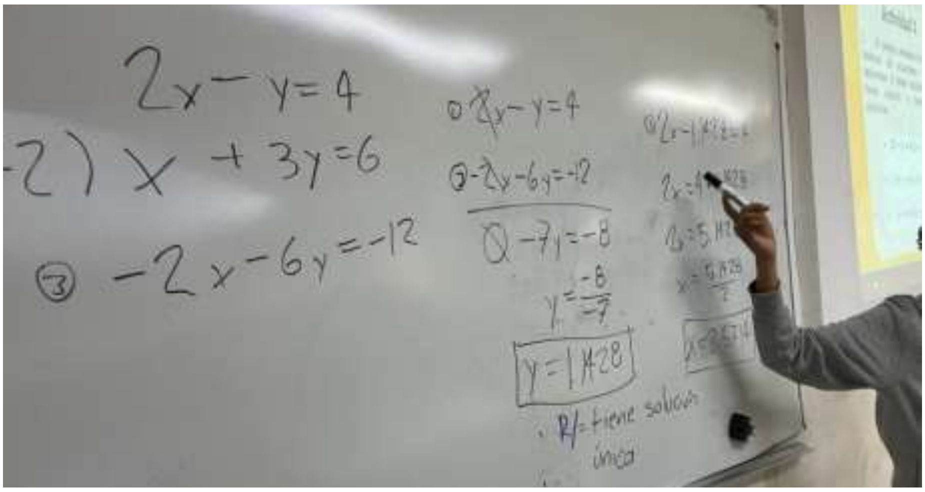

Figura 4. Respuesta de la estudiante E2.

Este hallazgo coincide con las investigaciones de León et al. (2024), quienes afirman que los estudiantes desarrollan una comprensión más profunda de los SEL cuando trabajan simultáneamente con representaciones algebraicas y gráficas. Asimismo, refuerza los planteamientos de Raymond Duval acerca de la necesidad de coordinar diferentes registros para construir significado matemático. La estudiante no solo resolvió correctamente el sistema, sino que también logró justificar e interpretar visualmente el resultado obtenido.

Por otra parte, la estudiante E1 trabajó con el sistema:

$$x + y = 4;\ x + y = 6$$

Al aplicar el método de reducción obtuvo la contradicción $0 = -2$, concluyendo correctamente que el sistema no tiene solución. Además, al escribir este sistema en GeoGebra, obtuvo gráficamente dos rectas paralelas, a lo que ella dijo que al no tener solución, lógicamente no existe un punto o puntos donde se toquen. Esta respuesta brindada por la estudiante E1 manifiesta una interpretación adecuada de lo que sucede algebraica y geométricamente, lo que podemos notar una relación adecuada entre estos dos registros, desde la interpretación de la inconsistencia encontrada algebraicamente hasta las dos rectas paralelas observadas gráficamente.

Figura 5. Respuesta del estudiante E1.

Esta forma de pensar de los estudiantes resulta relevante ya que están dejando de lado la forma tradicional de responder ejercicios matemáticos a través de algoritmos. Según Sandoval & Possani (2016) señalan que algunos estudiantes memorizan procedimientos sin comprender el significado de las soluciones obtenidas al resolver. En cambio, el estudiante E1 según los resultados logró construir una interpretación conceptual del sistema, apoyándose en los resultados obtenidos algebraica y gráficamente.

La última actividad a través de la entrevista semiestructurada permitió profundizar en los procesos de razonamiento de los estudiantes. Uno de los casos que encontramos más relevantes fue el del estudiante E2, quien trabajó con el sistema:

$$2x - y = 4;\ 4x - 2y = 8$$

El estudiante aplicó correctamente el método de reducción y la final de esto llegó a la resolución del ejercicio encontrándose con una igualdad de $0 = 0$, por lo cual argumento al final del ejercicio por escrito que es un sistema que tiene infinitas soluciones. Sin embargo, lo más significativo sucedió fue cuando relaciono este resultado con la representación gráfica de dos rectas que están encimadas. Durante la entrevista expresó que las rectas "poseen los mismo puntos", dándonos a entender que son ecuaciones que pueden representar una misma recta.

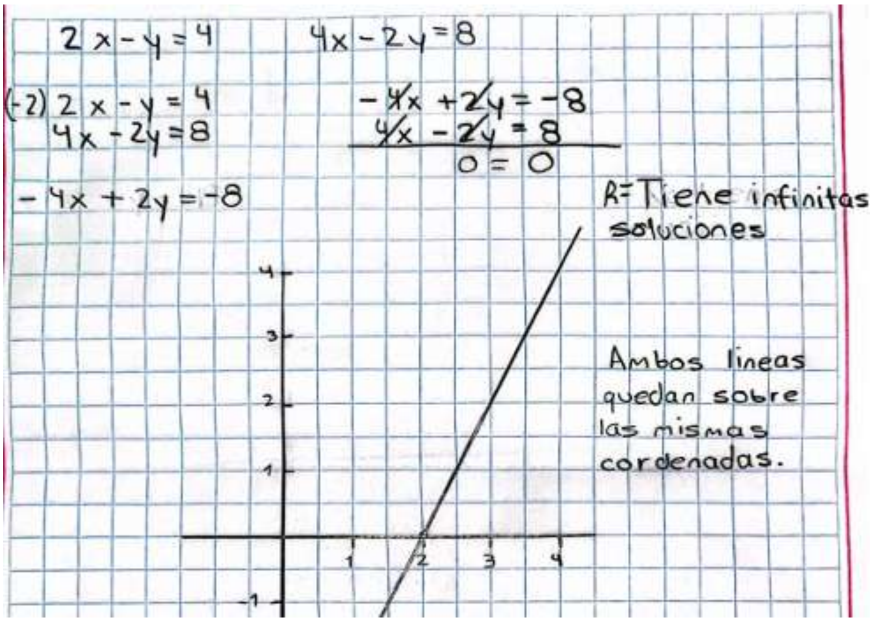

Figura 7. Respuesta del estudiante E2.
Fuente. Elaboración propia a partir de la producción escrita del estudiante E2.

Este resultado brindado por el estudiante E2 evidencia que logró construir una comprensión conceptual del significado de un conjunto solución que tiene infinitas soluciones, dejando de lado una resolución algorítmica. Además, el uso de GeoGebra desempeñó un papel fundamental al permitirle a los estudiantes visualizar de manera gráfica las soluciones de un SEL. Estos resultados coinciden con lo expuesto por Nugroho & Septianisha (2024), quienes sostienen que las herramientas tecnológicas ayudan a favorecer las habilidades de representación matemática y el razonamiento visual.

De igual manera, la estudiante E1 al resolver un sistema que no tiene solución interpretó correctamente que la contradicción $3 = 0$, gráficamente significa que son rectas que no tienen ni un punto en común, dicho por la estudiante de la forma "son rectas que no se tocan, son paralelas". Esta respuesta es significativa porque el estudiante da evidencia de que logra establecer una conexión entre un resultado algebraico con su resultado gráfico. Además, durante la entrevista el estudiante explicó que "para que un sistema tenga solución las rectas deben tocarse en algún punto", mostrando una apropiación del tema ya que muestra una comprensión conceptual del significado geométrico de un conjunto solución.

Otro hallazgo importante, se evidenció cuando la estudiante resolvió el sistema:

$$x + 3y = 72x - y = 2$$

La estudiante resolvió correctamente de manera algebraica el sistema obteniendo una solución aproximada de (1.714) y luego validó su resultado utilizando GeoGebra. Sin embargo, presentó dificultades para graficar manualmente soluciones decimales sin el apoyo del software. Este resultado pone de manifiesto tanto las ventajas como las limitaciones del uso de una herramienta digital en el aula. Por un lado, esta herramienta facilita procesos de visualización y validación matemática; por otro, también hace notar la necesidad de fortalecer habilidades de representación manual.

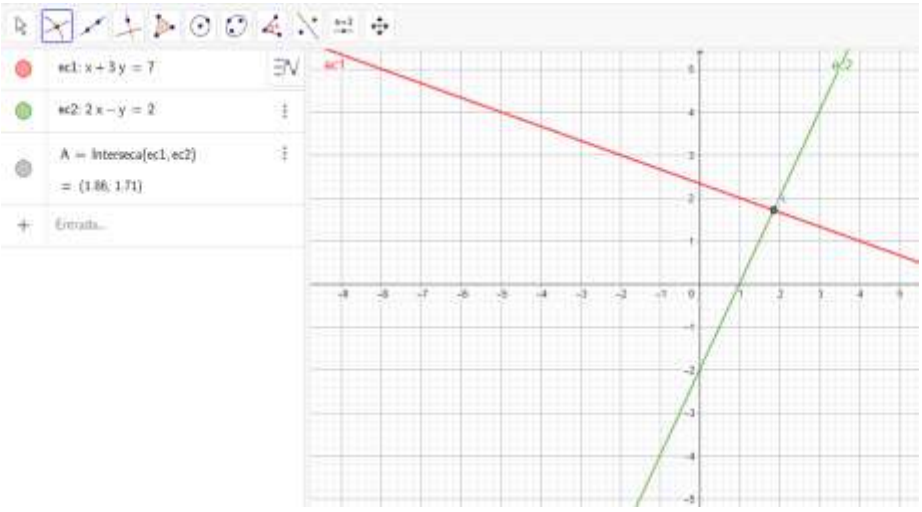

Figura 8. Respuesta de la estudiante E1.

Por otro lado, en el caso del estudiante E20 se pudo identificar otra situación importante. Aunque resolvió correctamente un sistema el cual tiene infinitas soluciones llegando a la igualdad de $0 = 0$, inicialmente no logro interpretar geométricamente el resultado, es decir, no logra entender el significado gráfico del porqué un sistema tiene infinitas soluciones. Durante la entrevista expresó que se sentía cómodo trabajándolo de la forma como más entendía, es decir de forma algebraica y expresó que "la forma gráfica no la entendí en clases, pero sí recuerdo que cuando se llegaba a una igualdad como esta quería decir que existían infinitas soluciones, es lo que recuerdo de mis clases anteriores". Con esto podemos reafirmar lo dicho por Sandoval & Possani (2016), de que algunos estudiantes se quedan en el registro en el cual se sientan más cómodos y les sean más fáciles de utilizar, evitando que quieran transportarse a otro registro más complejos.

No obstante, a través del diálogo guiado, el estudiante logró interpretar que si un sistema tiene soluciones infinitas "una recta debe estar encima de la otra". Este avance demuestra que la mediación pedagógica y las preguntas orientadas pueden favorecer que los estudiantes logren una reconstrucción conceptual sobre su resistencia a utilizar ciertos registros de representación.

https://amazoniainvestiga.info/ ISSN 2322- 6307

Generalmente, los resultados obtenidos evidencian que el uso de estrategias didácticas en la combinación de los registros algebraicos, geométricos y tecnológicos favorecen de manera relevante la comprensión conceptual de los SEL. Los estudiantes que lograron combinar distintos registros mostraron argumentaciones más sólidas, mayor capacidad para interpretar y mejor comprensión sobre un conjunto solución de un sistema. Estos resultados respaldan lo descrito por Raymond Duval acerca de lo relevante que es coordinar varias representaciones para construir un significado matemático.

Asimismo, estos hallazgos también coinciden con los de Henríquez-Rivas & Verdugo-Hernández (2024), quienes destacan que la selección de tareas y ejemplos por parte de los profesores influyen de manera directa en la forma en que los estudiantes conceptualizan las soluciones de ecuaciones y sistemas. En esta investigación, las actividades compartidas con la clase promovieron la exploración, la argumentación y la reflexión, permitiendo superar el trabajo mecánico centrados en la aplicación de algoritmos.

Desde una perspectiva práctica, el estudio demuestra que el uso de GeoGebra constituye un recurso didáctico importante para favorecer procesos de visualización gráfica, validación empírica y construcción conceptual. Ya que los estudiantes mostraron que al tener una visualización gráfica les fue muy útil para poder determinar cómo se relaciona esta con una solución algebraica.

Sin embargo, se identificaron algunas limitaciones. En primer lugar, algunos de los estudiantes mostraron y privilegiaron el tratamiento algebraico prefiriendo este porque se les hacía más fácil y mostraron dificultades para interpretar las gráficas. En segundo lugar, el estudio se desarrolló con un grupo pequeño y en un periodo corto de intervención, lo que limita poder generalizar aún más los resultados. Asimismo, no todos los estudiantes evidenciaron tener el mismo nivel de articulación entre registros, lo que sugiere la necesidad de implementar procesos más prolongados y didácticos.

Finalmente, los resultados permiten concluir que la combinación de la Teoría de Registros de Representación con estrategias de explotación matemática y herramientas tecnológicas constituye un camino efectivo para fortalecer la comprensión conceptual de los SEL en estudiantes de nivel secundaria. Como líneas futuras de investigación, se propone analizo otras herramientas tecnológicas cómo la Inteligencia Artificial Generativa (IAGen) podría ampliar las posibilidades de representación, argumentación y retroalimentación matemática en la enseñanza de los SEL.

En este contexto, la IAGen emerge como una tecnología con alto potencial para enriquecer la enseñanza de los SEL, al ofrecer retroalimentación personalizada, múltiples representaciones de los conceptos matemáticos y apoyo en los procesos de argumentación y resolución de problemas (Silgado-Tuñón et al., 2025a; 2025b). No obstante, su integración en el aula requiere un uso crítico y pedagógicamente fundamentado, en el que el profesor continúe desempeñando un papel central como mediador del aprendizaje donde estas herramientas pueden fortalecer la comprensión conceptual y promover experiencias de aprendizaje más personalizadas, siempre que su implementación esté acompañada de criterios didácticos, éticos y de formación docente (Silgado-Tuñón & López-Flores, 2025a; 2025b; Silgado-Tuñón et al., 2025a; 2025b).

Conclusiones

Los resultados encontrados en esta investigación demostraron que incorporar herramientas tecnológicas cómo GeoGebra en la enseñanza de los SEL favorece de manera relevante la comprensión conceptual de los estudiantes, al permitirles observar gráficamente los sistemas pudieron articular los registros algebraico y geométrico de manera coherente. Los estudiantes trabajaron con actividades mediadas con la tecnología mostrando tener mayor capacidad para identificar los tres tipos de soluciones de un sistema de ecuaciones. Además, lograron justificar sus respuestas y validar sus resultados tanto simbólicamente cómo gráficamente de manera correcta.

Estos hallazgos evidencian que el uso del software GeoGebra, en combinación con estrategias fundamentadas en la teoría de representaciones semióticas de Duval (1999) y el Ciclo ACE derivado de la teoría APOE, constituye un marco didáctico efectivo para promover en los estudiantes un aprendizaje significativo. La visualización gráfica de los sistemas y la posibilidad de ver los cambios gráficos al manipular parámetros facilitaron el tránsito entre representaciones y el desarrollo de habilidades de razonamiento y argumentación.

Asimismo, los resultados reafirman lo planteado por Duval (1999) y Sandoval & Possani (2016), quienes señalan que el pensamiento matemático se fortalece y mejora al coordinar varios registros de representación, ya que encontramos que la resolución de los SEL no debe tener cómo límite trabajarlos mecánicamente y centrarse únicamente en su representación algebraica. Dado que los estudiantes evidenciaron una comprensión más profunda al combinar y explorar más de una representación y realizaron una mejor comprensión al interpretar como una solución algebraica se relaciona con una geométrica.

Sin embargo, se encontraron limitaciones relevantes. En primer lugar, la muestra seleccionada para el estudio fue pequeña y concentrada en un solo contexto educativo, lo que limita realizar una generalización de los resultados. En segundo lugar algunos estudiantes se rehusaban a utilizar otro registro que no fuera el algebraico, ya que en sus clases anteriores decían que era la forma más fácil y entendible para ellos de hacerlo, lo que exige que debe haber una mediación de los profesores para los futuros estudiantes sobre cómo se realiza un cambio de registro y la relación de estos. Además, el estudio no incluyó instrumentos cuantitativos que permitirán medir estadísticamente el impacto de GeoGebra sobre el rendimiento académico estudiantil.

Para futuras investigaciones, se recomienda ampliar y trasladar a diferentes niveles educativos y si es posible a otros contextos escolares, así como también comparar los efectos que tiene el uso de una herramienta digital. También sería importante integrar metodologías cuantitativas o un estudio mixto para evaluar de manera más objetiva el desarrollo de las habilidades que presentan los estudiantes al utilizar más de un registro. Finalmente, se sugiere investigar sobre el papel que tiene un profesor cómo investigador tecnológico, explorando cómo las decisiones pedagógicas del docente influyen en la integración de la tecnología en las aulas de clase.

En suma, esta investigación aporta evidencias del potencial que tienen las tecnologías digitales de manera pedagógica en la enseñanza y aprendizaje del Álgebra en secundaria, mostrando el uso de GeoGebra no solo mejora la comprensión de la resolución de SEL, sino que también impulsan el cambio de la posible forma que traen los estudiantes de pensar, argumentar y construir un concepto matemático. La integración de tecnología educativa fundamentada con la teoría construye una vía efectiva para transformar la enseñanza del Álgebra en las escuelas.

Referencias bibliográficas

Anaya-Puebla, F. (2020). *Ambiente virtual de aprendizaje para la construcción del concepto Sistema de Ecuaciones Lineales fundamentado en la teoría APOE* (Tesis de Maestría en Educación matemática). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad De Ciencias Físico Matemáticas.

Arjudin, A., Subarinah, S., & Suryadi, R. (2020). Analyzing Students' Thinking Process in Solving Linear Algebra Problem. In *1st Annual Conference on Education and Social Sciences (ACCESS 2019)* (pp. 86-89). Atlantis Press.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1997). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in collegiate mathematics education. Providence, RI: American Mathematical Society*, *2*, 37-54.

Ballén, J. (2012). *El álgebra geométrica como recurso didáctico para la factorización de polinomios de segundo grado* (Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de: Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales). Universidad nacional de Colombia. Bogotá, Colombia.

Borji, V., Font, V., Alamolhodaei, H., & Sánchez, A. (2018). Application of the complementarities of two theories, APOS and OSA, for the analysis of the university students' understanding on the graph of the function and its derivative. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(6), 2301–2315. https://doi.org/10.29333/ejmste/89514

Deogratias, E. (2022). Using a crossing method as an alternative approach for teaching systems of linear equations in secondary schools. *International Online Journal of Education and Teaching (IOJET), 9*(2), 1022-1031. Retrieved from https://iojet.org/index.php/IOJET/article/view/1631

Drijvers, P., Ball, L., Barzel, B., Heid, M. K., Cao, Y., & Maschietto, M. (2016). *Uses of technology in lower secondary mathematics education: A concise topical survey*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-33666-4

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento, en *Investigaciones en Matemática Educativa II* (Ed. Hitt), 173-201. Université Louis Pasteur de Strasbourg, France; México: Grupo editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

Duval, R. (2018). Registers of semiotic representation. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_100033-1

Dubinsky, E. (1991). *Reflective abstraction in advanced mathematical thinking.* En D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking (pp. 95–123). Kluwer Academic Publishers.

Figueroa, R. (2013). *Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables: una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la teoría de situaciones didácticas* (Tesis de Maestría en Enseñanza De Las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica Del Perú, Escuela de Graduados.

Hall, J. S., & Chamblee, G. (2013). Teaching algebra and geometry with GeoGebra: Preparing pre-service teachers for middle grades/secondary mathematics classrooms. *Computers in the Schools, 30*(1-2), 12-29. https://doi.org/10.1080/07380569.2013.764276

Hernández, L. (2021). *Parámetros Como Elementos De Control En Sistemas De Ecuaciones Lineales, Una Exploración Con Profesores* (Tesis de Maestría en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN Departamento de Matemática Educativa. Unidad Zacatenco, Departamento de Matemática Educativa.

Henríquez-Rivas, C., & Verdugo-Hernández, P. (2024). Teachers' mathematical work based on examples presented in the teaching of algebra in secondary education. *Frontiers in Education, 9*. https://doi.org/10.3389/feduc.2024.1346091

Juandi, D., Kusumah, Y. S., Tamur, M., Perbowo, K. S., Siagian, M. D., Sulastri, R., & Negara, H. R. P. (2021). The effectiveness of dynamic geometry software applications in learning mathematics: A meta-analysis study. *International Journal of Interactive Mobile Technologies (iJIM), 15*(02), 18–37. https://doi.org/10.3991/ijim.v15i02.18853

Kú, D. (2007). *Aprendizaje de la base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE* (Tesis de Maestría en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

León, A., León, W., García-García, J., & Salgado-Beltrán, G. (2024). Mathematical connections made by preservice mathematics teachers when solving tasks about systems of linear equations. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 19*(4), em0799. https://doi.org/10.29333/iejme/15590

Martín, J. C., Maz, A., Madrid, M. J., & Rodríguez, M. J. (2024). Comprehension of linear systems with two unknowns in secondary education. *International Journal of Evaluation and Research in Education (IJERE), 13*(6), 28206. http://doi.org/10.11591/ijere.v13i6.28206

Nugroho, H., & Septianisha, N. I. (2024). Improving students' mathematical representation skills in systems of linear equations in two variables through GeoGebra-based STEM approaches: A quasi-experimental study. *Jurnal Pendidikan Matematika dan IPA*. https://doi.org/10.26418/jpmipa.v16i1.78553

Sandoval, I., & Possani, E. (2016). An analysis of different representations for vectors and planes in R^3: Learning challenges. *Educational Studies in Mathematics*, *92*, 109-127. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9675-2

Sansyzbayeva, A., Daiyrbekov, S., Berdaliyev, D., Daiyrbekova, G., & Sansyzbayev, A. (2024). Methods of teaching secondary school students to solve algebraic equations and inequalities and their systems. *Sci Herald Uzhhorod Univ Ser Phys, (56),* 1464-1473. https://doi.org/10.54919/physics/56.2024.146vf4

Setyowati, E., & Wijaya, A. (2025). The effectiveness of differentiated instruction with a Realistic Mathematics Education (RME) approach in terms of mathematical literacy and self-efficacy of junior high school students on the topic of systems of linear equations in two variables. *International Journal of Multicultural and Multireligious Understanding, 12*(10), 75-85. https://ijmmu.com/ijmmu/article/view/7109

Smith, J., Lee, I., Zandieh, M., & Andrews-Larson, C. (2022). A progression of student symbolizing: solutions to systems of linear equations. *Avances de investigación en educación matemática*, *(21)*, 45-64. https://doi.org/10.35763/aiem21.4237

Silgado-Tuñón, D. A., & López-Flores, J. I. (2025a). Inteligencia Artificial Generativa en la Educación Superior: una Revisión Sistemática. *UNIÓN - REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 21*(73), 1-19. Recuperado a partir de https://www.revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/1709

Silgado-Tuñón, D. A., & López-Flores, J. I. (2025b). Inteligencia Artificial Generativa en el aula: ¿aliada o amenaza para la enseñanza de las matemáticas? *Revista Electrónica Tecnologías Emergentes En La Educación, 2*(1), 53-66. https://doi.org/10.71713/retee.v2i1.3512

Silgado-Tuñón, D. A., Sureda, P., López-Flores, J. I., & Magallanes, E. (2025a). Exploring university mathematics professors' perceptions and use of GenAI: a conceptual fields approach. *Amazonia Investiga, 14*(86), 250–263. https://doi.org/10.34069/AI/2025.86.02.19

Silgado-Tuñón, D. A., López-Flores, J. I., & Carrillo, C. G. (2025b). IA, discapacidad y docencia inclusiva: una reflexión desde el DUA y el TPACK. (2025). *Revista Electrónica Tecnologías Emergentes En La Educación*, *2*(2), 72-90. https://doi.org/10.71713/retee.v2i2.3728

Tashtoush, M., Wardat, Y., Al-Shannaq, M., AlAlf, R., Saleh, S., & Al-Saud, K. (2023). Conceptual understanding of systems of linear equations: Difficulties and challenges. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 19*(12), em2365. http://dx.doi.org/10.18576/isl/121210

Tatira, B. (2023). Undergraduate students' conceptualization of elementary row operations in solving systems of linear equations. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *19*(11), 23-49. https://doi.org/10.29333/ejmste/13679

Vizcaíno, O. (2003). *Evaluación de un curso de cálculo cuando se usa el ciclo ACE fundamentado en la teoría APOE*. En Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 16, pp. 1–7). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME). https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/evaluacion-de-un-curso-de-calculo-cuando-se-usa-el-ciclo-ace-fundamentado-en-la-teoria-apoe/